中学数学竞赛练习题

巴黎老唐，www.parislaotang.com

注：该练习适合有初中以上数学知识的同学和数学爱好者

定义：如果一组四个不同的正整数（a,b,c,d）符合 a*b-c*d=1 这个关系的话，被称为“有趣数集”。

命题：

1， 在{1,2,3,4,5,6,7,8}里找出一组“有趣数集”；
2， 证明在 {1,2,3,4,5,6,7,8} 里不可能有两组用尽所有 8 个数的“有趣数集”；
3， 假如有 {1,2,3,4,5,6,7,8... 4*n} 这样一个数集，证明不可能有 n 组用尽所有 4*n 个数的“有趣数集” 。

解题：

1， 这部分很容易，（1,7,2,3）；（2,3,1,5）；（2,4,1,7) 都是有趣数集；

2， 不动脑经的话，有人会把所有可能的“有趣数集”列出来，然后一一排除，但这样就浪费时间，也不可能做第三题了。所以这需要分析一下 a*b - c*d = 1 这个关系。a*b 和 c*d 只差 1，那两者一定是连续的两个正整数，一个偶数、一个奇数。奇数只能是两个奇数之积（因为偶数和奇数之乘积一定是偶数）。所以， 在任何“有趣数集” （a,b,c,d）里，只能有一个偶数或两个偶数，而且，在有两个偶数的情况下，两个偶数一定在同一乘组里（或 a,b 是偶数或 c,d 是偶数，不然两组的乘积都将是偶数）。

假如 {1,2,3,4,5,6,7,8} 里有两组用尽所有 8 个数的“有趣数集” （a,b,c,d） 和 （e,f,g,h），这两组数里一定是各有一对偶数（不然就不可能用尽所有 4 个偶数）。

我们分析一下有 1 的“有趣数集” （a,b,c,1） 或 （1,b,c,d），也就是

a*b-c=1 （1） 或 b-c*d=1 （2）

由（1）：

c=3, a, b 无解；

c=5, “有趣数集” （2,3,5,1）；

c=7, “有趣数集” （2,4,7,1）；

由（2）：

b=3, c, d 无解;

b=5, c, d 无解;

b=7, “有趣数集” （1,7,2,3）

在以上的三个“有趣数集”里，只有一个（2,4,7,1）有两个偶数，有可能会在假设的结果里。

但剩余的数字（3,5,6,8）3*5-6*8 或 6*8 – 3*5 结果都不是 1。

所以 {1,2,3,4,5,6,7,8} 里有两组用尽所有 8 个数的“有趣数集”的假设不成立。

3, 假如 {1,2,3,4,5,6,7,8… 4*n} 里有 n 组用尽所有 4*n 个数的“有趣数集”，那这 n 组数里的每一组一定是有、而且只有一对偶数（假如有一组只有一个偶数的话就不可能用尽所有 2*n 个偶数）。

在每一组（a_k, b_k, c_k, d_k）里 $a_k*b_k - c_k*d_k = 1$

我们可以注意到任何两个相邻的偶数的乘积和紧随的两个奇数的乘积之差实际上是相当大的，比如：

$(2n+2)*(2n) – (2n+1)* (2n-1) = 4n^2+4n – (4n^2-1) = 4n+1$

这个差距很大， 越是 n 大，差距就越大。而 $a_k*b_k - c_k*d_k = 1$ 这样的等式使得偶数乘积和奇数乘积从整体上来说只差 1 。从直觉上来看不太可能。但直觉只是指出了一个寻找证明的方向而不是证明本身。

我们注意到，命题里提到使用所有数字，实际上也就是每个数字都出现在一组“有趣数集”里，也只能出现一次（不然就有其它数字没位子）。

所以，假如我们将所有的奇数乘积项搬到等式的右面： $a_i * b_i = c_i * d_i \pm 1$ （奇数乘积可以在前项也可以在后项）。 这里$a_i * b_i$是偶数项，$c_i * d_i$是奇数项，根据奇数项在前或在后，根式右侧可以是加一或减一。但

$c_i * d_i \pm 1 \le c_i * d_i + 1 < (c_i + 1) * (d_i + 1) = c_i * d_i + c_i + d_i + 1$， 也就是说，

$c_i * d_i \pm 1 < (c_i + 1) * (d_i + 1)$ ➔ 所有右侧项奇数乘积±1 都绝对小于各自大一位的偶数的乘积。

所以，当我们将所有 n 个方程 左侧项相乘和右侧项相乘后：

$$\prod_{1}^{n} a_i * b_i = \prod_{1}^{n} (c_i * d_i \pm 1) < \prod_{1}^{n} ((c_i + 1) * (d_i + 1))$$

左侧是所有{1,2,3,4,5,6,7,8… 4*n}中偶数之乘积，而右侧是{1,2,3,4,5,6,7,8… 4*n}中所有奇数后面的偶数之乘积，也就是左侧之积。这就产生了一个数绝对小于它自己的不可能存在的矛盾。

所以假设 {1,2,3,4,5,6,7,8… ,4*n} 里有 n 组用尽所有 4*n 个数的“有趣数集”不成立。