# 中学数学竞赛练习题

- 你会用圆规和直尺作出一给定正方形面积的 7/8 的正方形吗?

**作者：巴黎老唐，**www.parislaotang.com

注：该练习适合有初中以上数学知识的同学和数学爱好者

**原始命题：**

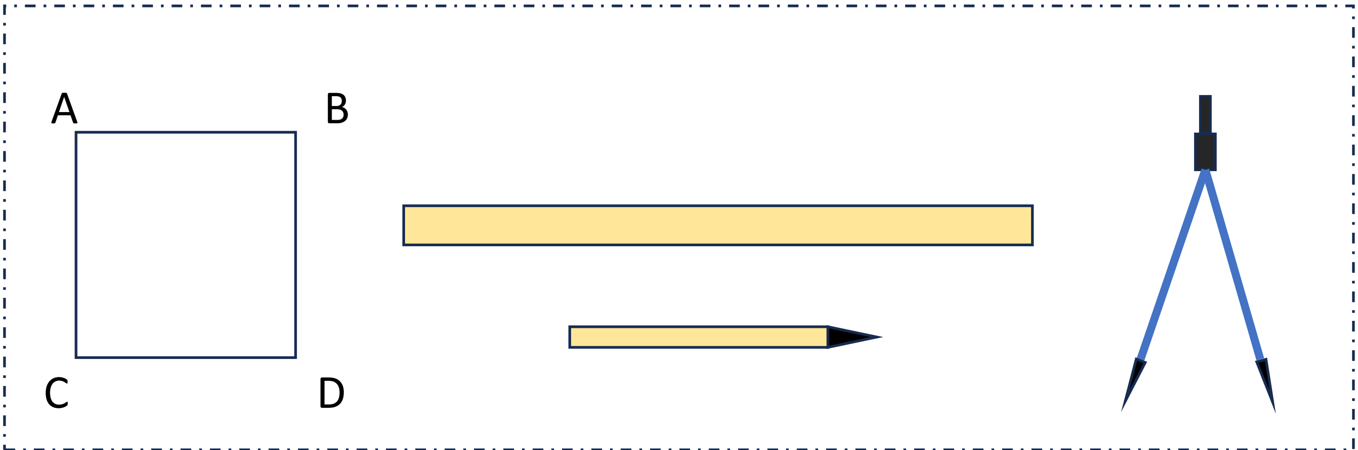
1，请作出与给定正方形 ABCD 面积比例为 7/8 的正方形；
2，请作出与给定正方形 ABCD 面积比例为$\sqrt{2}$的正方形；
3，请证明用圆规和直尺可以作一个与给定正方形 ABCD 面积比例为 n/m 的正方形 （n, m 为任何大于 1 的正整数），
4，设 X 为所有用圆规和直尺作一个与给定正方形 ABCD 面积比例为 n/m 的正方形的所有方法之集。假设 x∈ $X$，设 Fx（n, m）为使用圆规或直尺作出与给定正方形 ABCD 面积比例为 n/m 的正方形的次数 （简称“圆规直尺函数”）；请设计一个方法 x∈ $X$，使得 Fx(m-1, m) 符合 $\lim_{m\to\infty}(\frac{\text{Fx（m−1, m）}}{m}) = 0$。
5，请证明所有可用圆规直尺作出的正方形与给定正方形面积的比例数是个几何数域。

Proposition:

1. Please make a square whose area is 7/8 of the given square ABCD;
2. Please make a square whose area is $\sqrt{2}$ of the given square ABCD;
3. Please prove that we could built with a compass and a ruler a square whose area is n/m (n, m are any positive integers greater than 1) of the given square ABCD.
4. Let X be the set of all methods of making a square whose area is n/m of a given square ABCD using a compass and a ruler. Suppose x∈X, let Fx(n, m) be the number of times a compass or a ruler is used to make a square whose area is n/m of square ABCD (referred to as the "compass and ruler function"); please design a method x∈X such that Fx(m-1, m) satisfies $\lim_{m\to\infty}(\frac{\text{Fx（m−1, m）}}{m}) = 0$.
5. Please prove that all ratios of squares that can be drawn with a compass and a straightedge to the area of a given square is an algebraic field.

**引言**：如果这个题目这样直接提出，就可能是奥数比赛题了。但如果我们一步步分拆出来做的话，有初中以上数学知识的人士就可做，至少第一、二 、三部分。

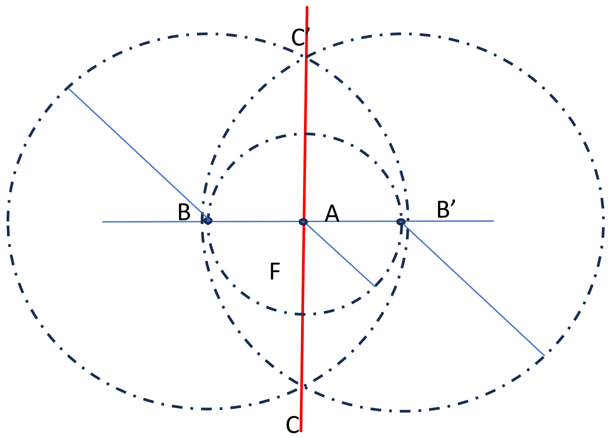
**已知条件：**给定正方形 ABCD（边长为 L=1，面积记为 S=1），一把直尺，一个圆规，一支笔 。




尺只能用来画直线，圆规只能画圆和用来复制长度，铅笔划线。并假设尺子足够长，圆规足够大，没有限制。

**解题需用基本知识**:

**A，用圆规和直尺作一条经过给定点 A，垂直于直线 AB 的直线：**

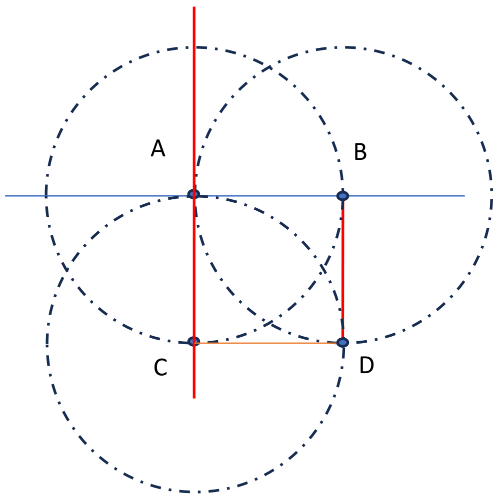



1，　向左侧延长 AB 线;
2，　用圆规以 A 为中心画一个圆，交直线 AB 于 B 和 B'点;
3，　以 B 为中心画一个半径大于 AB 的圆;
4，　以 B'为中心画和上面同一半径大的圆；两圆相交于 C 和 C'点;
5，　用尺子过 C 和 C'点画的直线垂直于过 A 和 B 的直线

证明 直线 CC'垂直于 AB：C'BCB' 为菱形，对角线相互垂直。

注：该操作共需使用圆规或直尺 5 次。

**B，作边长为既定长度 AB 的正方形**




1，　过 A 作 AB 的垂直线 （用 5 次圆规或直尺，见上例）
2，　作以 A 为中心、AB 为半径的圆，交上述垂直线于 C （已有）;
3，　作以 B 为中心、AB 为半径的圆；（1 次）
4，　作以 C 为中心、AB 为半径的圆，交上述圆于 A, D；（1 次）
5，　链接 C、D 和 B、D。（2 次）

四边形 ABCD 为既定长度 AB 的正方形。

证明:

根据制作方式，AB=AC=BD=CD; AC 垂直于 AB，角 CAB 为直角。

三角形 ACD 和 ABD 为等腰三角形，角 CAD = CDA ;

同理，角 DAB = ADB ; CAD + DAB 为直角 ➔ CDA + ADB 为直角;

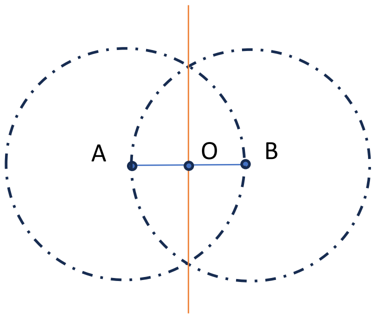
三角形 ABC 和 BCD 为等腰三角形，顶角为直角，两边角相等，必定为 45°。

所以四角都为直角。

所以，四边形 ABCD 四边等长，四角为直角，所以是正方形。

注：该操作共需使用圆规或直尺 9 次 。

**C，用圆规和直尺将一线段分割成两个等长的线段**




设 AB 为给定线段

1，以 A 为圆心、以 AB 为半径作圆;

2，以 B 为圆心、以 AB 为半径作圆;

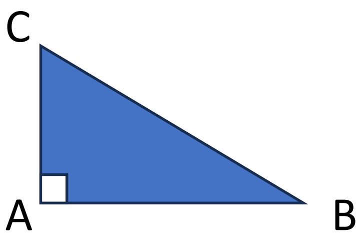
3，过两圆交点作直线，于 AB 相较于 O

AO = OB = ½ AB

（证明可参照 A）

注：该操作共需使用圆规或直尺 3 次

**D，勾股定理：**



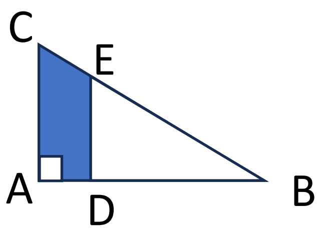

直角三角形边长符合

$BC^2=AB^2+AC^2$

**E，相似三角形定理：**

如果两三角形 ABC 和 DBE 相似，对应边成等比。

DE : AC = BE : BC=DB : AB



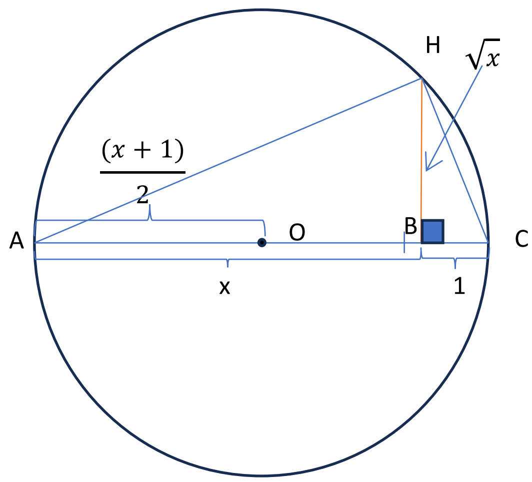

**F，平行线定理：**

如果两直线和第三条直线相交时同位角相等，则该两条线平行。

在上图中，AC 和 ED 和 CB 相交，由于两三角形 ABC 和 DBE 相似，角 ACB 和角 DEB 相等，所以直线 AC 和 ED 平行。

**G，任何 x>0 我们能用圆规和直尺得到$\sqrt{x}$**

1, 延长长度为 x 的直线至 C，BC = 1；（2 步）
2, 取中点 O；（3 步）
3, 以 O 为中心作半径为 AO 的圆；（1 步）
4, 过 B 作 AC 的垂直线交圆与 H；（5 步）




三角形 AHB 和 BHC 相似 （读者自己证明）

HB : AB=BC : HB ➔ HB/x = 1/HB ➔ $HB^2 = x$ ➔ HB = $\sqrt{x}$

该操作共需使用圆规或直尺 8 次 。

注：

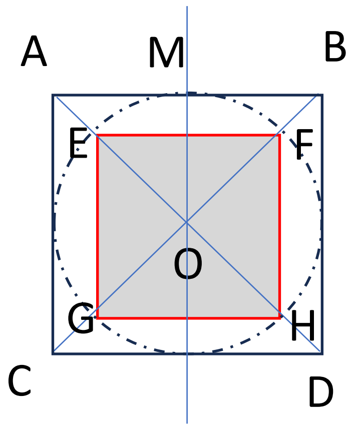
由此我们可以推出，任何 x>0 我们都能用圆规和直尺得到$\sqrt[2k]{x}$， $k \geq 0$的整数。

这个方法也可以反过来用，从 $x$ 得到 $x^2$，所以任何 x>0 我们可以用圆规和直尺得到 $x^{2p}$， $p \geq 0$的整数。

**命题拆解**:

**I，用圆规和直尺作一个面积是给定正方形 ABCD 面积一半的正方形**

**I-a，方法 1**



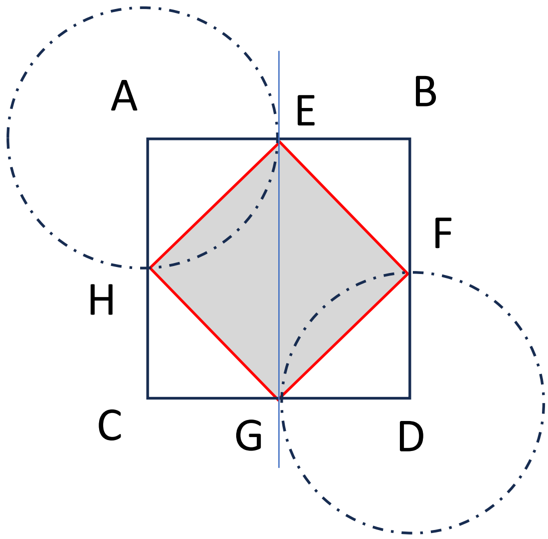

1， 作 A 和 D 对角线;
2， 作 B 和 C 对角线，和 AD 交于 O;
3， 将 AB 一分为二， 中点 M（参照基本知识 C 节）;
4， 作以 O 为中心、OM 为半径的圆，交 AD 于 E，H，交 BC 于 F，G;
5， 连接 EF，FH，GH，EG;

读者可自己证明 EFGH 四角是直角，四边相等，边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$。

所以四边形 EFGH 为正方形，其面积为正方形 ABCD 的一半。

注：该方法共需使用直尺和圆规 10 次 （其中第三步，分割一线段为二需要用三次圆规和直尺）。

**I-b，方法 2**




1， 将 AB 一分为二， 中点 E（参照基本知识 C 节）;
2， 作以 A 为中心、AE 为半径的圆，交 AC 于 H;
3， 作以 D 为中心、E 为半径的圆，交 CD 于 G，交 BD 于 F;
4， 连接 E、F、G、H;

读者可自己证明 EFGH 四角是直角，四边相等，边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$。

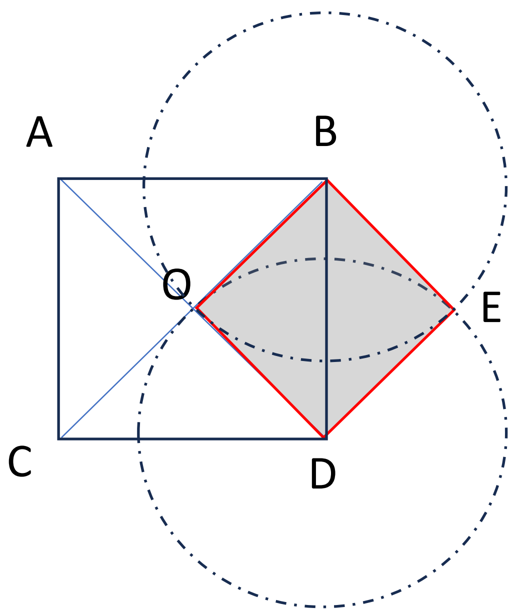
所以四边形 EFHG 为正方形，其面积为正方形 ABCD 的一半。

注：该方法共需使用直尺和圆规 9 次 。

但还有更简短的方法!

**I-c，方法 3**

1， 作 A 和 D 对角线;
2， 作 B 和 C 对角线，和 AD 交于 O;
3， 作以 B 为中心、BO 为半径的圆;
4， 作以 D 为中心、BO 为半径的圆，两圆相交于 E;
5， 连接 B、E 和 D、E。




四边形 BODE 为正方形，其面积为正方形 ABCD 的一半。

证明:

根据勾股定理，$\mathrm{AD}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BD}^2 = 2\mathrm{AB}^2 \rightarrow \mathrm{AD} = \sqrt{2}AB = \sqrt{2}$

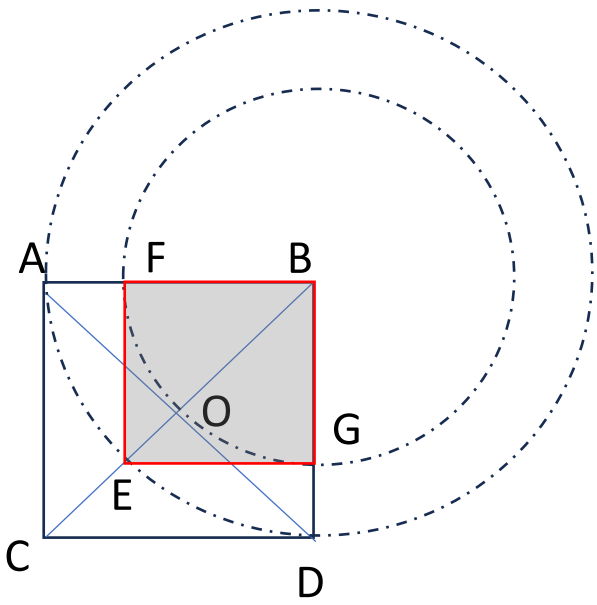
BO=OD=DE=$\frac{\sqrt{2}}{2}$;

四边形 BODE 四边等长，四角为直角，所以是正方形。

正方形 BODE 的面积是 $\mathrm{BO}^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

注：该方法共需使用直尺和圆规 6 次。

**I-d，方法 4**




1, 作 A 和 D 对角线;

2, 作 B 和 C 对角线，和 AD 交于 O;

3，作以 B 为中心、BO 为半径的圆，交 BD 于 G，交 AB 于 F;

4，作以 B 为中心、AB 为半径的圆，交 BC 于 E;

5，链接 F 和 E

6，链接 E 和 G

四边形 FBEG 为正方形，其面积为正方形 ABCD 的一半。

证明:

根据勾股定理，$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2\mathrm{AB}^2 \rightarrow \mathrm{BC} = \sqrt{2}AB = \sqrt{2}$

$FB = BG = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

BE = AB = 1

$\frac{FB}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{BE}{BC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

根据相似三角形定理，三角形 BFE 和三角形 BAC 相似;

所以 FE 和 AC 平行; 同理 EG 和 BD 平行。

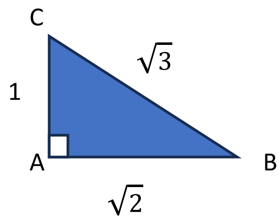
由此，四边形 FBEG 四角是直角。

另外，FE = BG = EB = EG = $\frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\times\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 即四边相等。

因此，四边形 FBEG 为正方形。面积 $FE^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}S$

注：该方法共需使用直尺和圆规 6 次。

**II，用圆规和直尺作一个给定正方形 ABCD 面积 1/3 的正方形**




讨论：面积为 ABCD 面积 1/3 的正方形，也就是边长为$\frac{\sqrt{3}}{3}$的正方形。所以首先要得到$\sqrt{3}$的线段。

我们已有了$\sqrt{2}$（正方形 ABCD 的对角线），$\sqrt{3}$就可以从两直角边为$\sqrt{2}$和 1 的直角三角形得到:

根据勾股定理:

$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 3 \quad \rightarrow \quad \mathrm{BC} = \sqrt{3}$

下面我们用圆规和直尺来实现 。

**II-a，作出$\sqrt{3}$长的直线：**

1，过 D 作 AD 的垂直线（见基本知识 A）；（5 步）

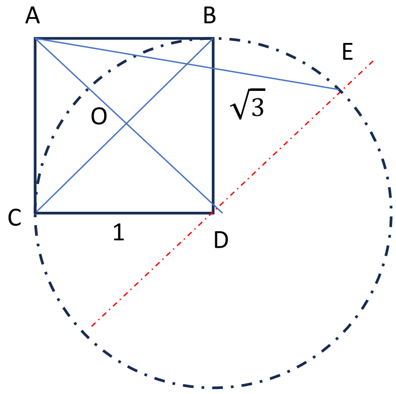
2，作以 D 为中心、DB 为半径的圆，交上述垂直线于 E；（1 步）

3，链接 AE；（1 步）

证明：

在直角三角形 ADE 中，AD=$\sqrt{2}$，DE=1，

根据勾股定理。AE=$\sqrt{3}$




4，作过 E 垂直于 AE 的直线；（5 步）

5，以 E 为起点，在以上垂直线上用圆规作连续三段长度为 1 的线段：EF，FG，GH；（3 步）

6，链接 A、H；（1 步）

7，过 G 作 EH 的垂直线交 AH 于 I 。（1 步）

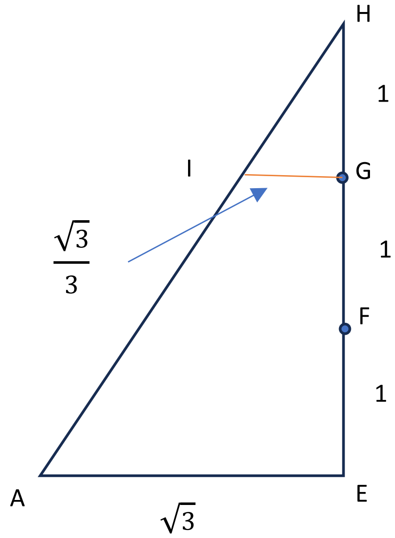
那么，IG 的长度为$\frac{\sqrt{3}}{3}$

证明：

三角形 HIG 和 HAE 为相似三角形。

所以，IG:AE = HG:HE ➔ IG=AE×$\frac{HG}{HE}$=$\sqrt{3}$×$\frac{1}{3}$ = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

我们可以数一下，从得知$\sqrt{2}$到得到$\frac{\sqrt{3}}{3}$，我们一共用了 17 次圆规或直尺。




**II-b，作边长为$\frac{\sqrt{3}}{3}$的正方形**

参见基本知识 B 条。

从一个长度为$\frac{\sqrt{3}}{3}$的线段，作出面积为$\frac{1}{3}$的正方形，需要用 9 次圆规和直尺 。

**III，作出与 ABCD 面积比例为 7/8 的正方形**

**III-a : 顺序建作法**

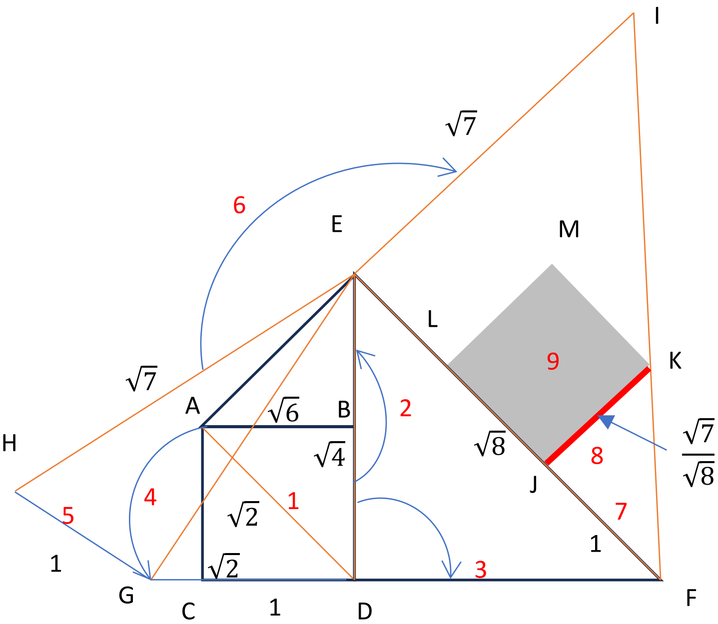
1, 作 ABCD 对角线 AD 得$\sqrt{2}$（1 步）；

2, 延长 DB，作以 B 为中心，BD 为半径圆弧，交 DB 延长线于 E，得 ED= $\sqrt{4}$或 2（2 步）；

3, 延长 CD，作以 D 为中心，ED 为半径圆弧，交 CD 延长线于 F，得EF = $\sqrt{8}$（3 步）；

4, 作以 D 为中心，AD 为半径圆弧，交 CD 延长线于 G，得EG = $\sqrt{6}$（2 步）；

5, 作过 G，垂直于 EG 的直线，作以 G 为中心，AC 为半径圆弧，交前垂直线于 H，得EH = $\sqrt{7}$（6 步, 注明：圆弧可以包含在作垂直线时作的圆）；



6, 作过 E，垂直于 EF 的直线，作以 E 为中心，EH 为半径圆弧，交前垂直线于 I，连接 IF（6 步, 注明：圆弧可以包含在作垂直线时作的圆），得$IF = \sqrt{8}$；

7, 作以 F 为中心，1 为半径的圆弧，交 EF 于 J（1 步）；

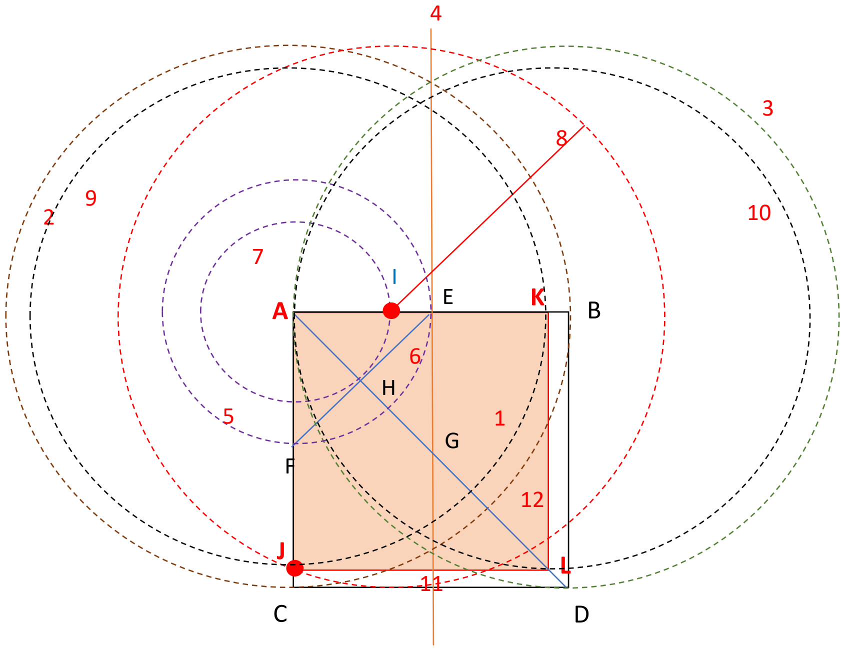
8, 作过 J，垂直于 EF 的直线，交 IF 于 K，得 JK = $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}$ （4 步）；

9, 以 JK 为边长作正方形得面积为 ABCD 面积 7/8 的正方形 LMJK （5 步）。

该方法总共需要使用 30 次圆规或直尺。

**III-b : 最快 12 步作成**

1） 作对角线 AD,
2） 在 A 做半径为 1 的圆,
3） 在 B 做半径为 1 的圆,
4） 连接上两圆交点（AB 垂直中线，交 AB 与 E），
5） 在 A 做半径为 AE （1/2）的圆，交 AC 于 F,
6） 连接 EF 交 AD 于 H,
7） 在 A 做半径为 AH （$\sqrt{2}/4$）的圆，交 AB 于 I,
8） 在 I 做半径为 1 的圆，交 AC 于 J,
9） 在 A 做半径为 AJ （$\sqrt{14}/4 = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}$）的圆，交 AB 于 K,
10） 在 K 做半径为 AK 的圆，交 AD 于 L,
11） 连接 KL,
12） 连接 JL。




AJLK 是正方形，其面积是 7/8 （读者可以试着证明一下）。

该方法总共需要使用 12 次圆规或直尺。

**IV，作出与 ABCD 面积比例为$\sqrt{2}$的正方形**

要作出 ABCD 面积比例为$\sqrt{2}$的正方形，我们就需要得到$\sqrt[4]{2}$的线段。

根据基本知识 G 节，任何 x>0 我们都能用圆规和直尺得到$\sqrt{x}$。而我们知道$\sqrt{2}$，因为它是 ABCD 对角线的长度， 所以我们就能作出$\sqrt[4]{2}$的线段。然后用该线段作出的正方形的面积就是$\sqrt{2}$。

更普遍的说 （重复使用$x \to \sqrt{x}$），我们可以用圆规和直尺作出给定正方形面积任何比例为$\sqrt[2^k]{x}$的正方形。

**V : 用圆规和直尺作一个给定正方形 ABCD 面积比例为 n/m 的正方形**

（即面积为 ABCD 面积 S 的 m 分之 n），n, m 为正整数，且$n, m \geq 1$。

思考：假如我们能作出长度为 $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$ 线段，那么以此线段作出正方形，它的面积就是 n/m。

**V-a，我们首先证明，任何正整数 n 我们能得到$\sqrt{n}$**

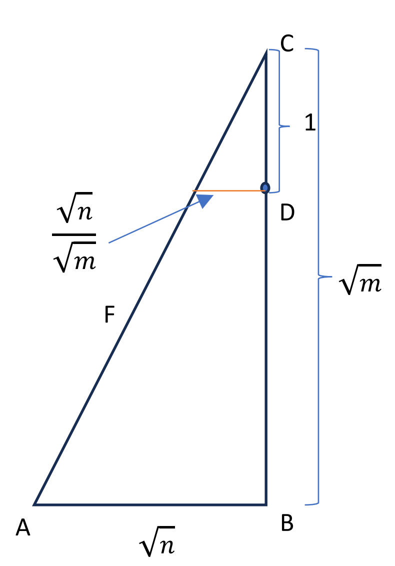
首先我们只要用 n 次圆规，就能得到长度为 n 的线段。

然后根据基本知识第 G 节，我们就能得到长度为$\sqrt{n}$ 的线段。

我们可以算一下，这个过程需要用 n+8 次圆规和直尺 （8 次从 n 到$\sqrt{n}$）。

同样得到$\sqrt{m}$，我们需要用 m+8 次圆规和直尺。

**V-b，已知$\sqrt{n}$ 和 $\sqrt{m}$，用圆规和直尺作出$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$**




作长度为$\sqrt{n}$ 的直线 AB（已知），作长度为$\sqrt{m}$ 的直线 BC（已知），直角在 B 的三角形，共需使用 1+5+1= 7 次圆规和直尺；

以 C 为圆心，半径为1，作圆交 BC 于 D；共需使用 1 次圆规；

过 D，作 BC 的垂直线，交 AC 于 F；FD 和 AB 平行。共需使用 5 次圆规和直尺；

由此三角形 CFD 和 CAB 相似。

根据相似三角形定理：$\frac{FD}{AB} = \frac{CD}{CB}$ ➔ $FD = AB * \frac{CD}{CB} = \sqrt{m} * \frac{\sqrt{n}}{m}$

➔ $FD = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$

所以，从$\sqrt{n}$ 和 $\sqrt{m}$ 出发，需要用 13 次圆规和直尺作出$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$；

然后还需使用 5 次圆规或直尺作出边长为$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$，面积为(n/m)的正方形。

从正方形 ABCD 出发，使用该方法作出 ABCD 面积比例为 n/m 的正方形共需 n+8+m+8+13+5=n+m+34 次圆规或直尺 。

注：由此我们证明了我们可以用圆规和直尺作出给定正方形面积任何比例为 n/m 的正方形，同时也证明了我们可以用圆规和直尺作出给定正方形面积比例为$\sqrt{\frac{n}{m}}$的正方形 （基本知识 G）。更普遍的说 （重复使用$x \rightarrow \sqrt{x}$），我们可以用圆规和直尺作出给定正方形面积任何比例为$\sqrt[2^k]{\frac{n}{m}}$的正方形。另外假如我们能作出 x 的话，我们也可以重复使用 $x \rightarrow x^2$，作出$x^{2^p}$，所以我们可以用圆规和直尺作出给定正方形面积任何比例为 $(\frac{n}{m})^{2^p}$ 的正方形，n,m,k,p 整数；n,m>0；$k, p \geq 0$。

**VI，寻找通用优化的方法来作一个与正方形 ABCD 面积比例为 n/m 的正方形**

命题需求：用圆规和直尺作一个与正方形 ABCD 面积比例为 n/m 的正方形 （n, m 为正整数，且$n, m \geq 1$）。完成过程中需要使用多次圆规或直尺，使用的次数会随 n, m 的变化而变化。设 Fx（n, m）为实现符合以上要求的正方形使用圆规或直尺的次数，请找出这样一种实现方法，使得$\lim_{m\to\infty}(\frac{\text{Fx (m−1,m)}}{m}) = 0$。

根据上一节中使用的方法，作出正方形 ABCD 面积比例为 n/m 的正方形需要使用 n+m+34 次圆规和直尺。

这个方法的“圆规直尺函数” Fx(n,m)= n+m+34,

$\lim_{m\to\infty}(\frac{\text{Fx (m−1,m)}}{m}) = \lim_{m\to\infty}(\frac{m-1+m+34}{m}) = \lim_{m\to\infty}(2+\frac{33}{m}) = 2$；这个“圆规直尺函数”不符合命题要求，显然是太宽松了。

如何优化实现目标正方形的方法？

**VI-a：优化取得 n, m 的方法**

第 VI-a 节，为得到 n 长的线段，我们用了 n 次圆规。其实，假如 n 是个偶数，比如，n=2k，我们得到长度为 k 的线段后，只要一步就可直接复制长度为 k 的线段而得到长度为 2k=n 的线段，而不需经过 k+1, k+2, … n。假如 n 是个奇数，n=2k+1，我们在得到长度为 k 的线段后，只要一步就可得到 2k，再一步得到 n=2k+1。

不难证明：$\forall n > 1, \exists k \geq 0$，$n, k$ 为正整数，$2^k \leq n < 2^{k+1}$

（也就是说任何正整数 n 肯定能夹在两个连续的 2 的指数之间。读者可以自己练习一下证明）

我们已经知道，从 1 到 $2^k$, 需要经过 K 次从 $2^p$ 到$2^{p+1}$ 的过程，p=0，1，2，... k-1，（1，2，4，8，...），也就是需要 K 次使用圆规；

如果 $n = 2^k$， 问题就结束了，我们只需要使用 K 次圆规。

但假如$n > 2^k$ ， 那就 还需要加长$n - 2^k$ 这部分。

然而 $n < 2^{k+1} \rightarrow n - 2^k < 2^{k+1} - 2^k = 2 * 2^k - 2^k = 2^k$ （1）

对 （$n - 2^k$）来讲， $\exists i$， $2^i \leq n - 2^k < 2^{i+1}$ （2）

由以上（1） 和 （2）， 我们可以推定 $i + 1 \leq k$

如上，从 1 到$2^i$, 需要使用经过 i 次使用 圆规，也就是不超过 (k-1) （因为$i + 1 \leq k$）。

如此类推，假如$n - 2^k > 2^i$， 我们就还需要继续加 $\mathrm{n} - 2^k - 2^i$

$\exists j \leq i - 1 \leq k - 2, \quad 2^j \leq \mathrm{n} - 2^k - 2^i < 2^{j+1}$

也就是从 1 到$2^j$, 需要使用经过 j 次使用 圆规，不超过 (k-2) 。

如此继续循环，每次指数至少提减 1 ，

直至 $1 \leq \mathrm{n} - 2^k - 2^i - 2^j - \ldots - 2^p < 2$；也就是 $\mathrm{n} = 2^k + 2^i + 2^j + \ldots + 2^p + 1$

或在某个 $p \geq 1$ 时， $2^p = \mathrm{n} - 2^k - 2^i - 2^j - \ldots$ 也就是 $\mathrm{n} = 2^k + 2^i + 2^j + \ldots + 2^p$

（k,i,j,..p ）是一严格提减数列，它的成员是包含在 （k, k-1,k-2,..., 2, 1）内的。

由此，作出 n 的使用 圆规或直尺的次数

$$S(n) = (k + i + j \ldots) + k \leq (k + (k-1) + (k-2) \ldots + 2 + 1) = k * \frac{k+1}{2} = k * \frac{k+1}{2}$$

同样 $\forall\, m > 1, \exists l \geq 0,\ m, l$ 为正整数，$2^l \leq m < 2^{l+1}$

作出 m 的使用圆规或直尺的次数的上限函数为 $T = l * \frac{l+1}{2}$

**VI-b：寻找优化方案的 Fx（n,m）上限函数**

综上所说，用以上方法作出 ABCD 面积比例为 n/m 的正方形使用 圆规或直尺次数：

得 n： 至多用 $k * \frac{k+1}{2}$ 次圆规直尺， $2^k \leq n < 2^{k+1}$， $k$ 为正整数

从 n 得$\sqrt{n}$： 8 次

得 m： 至多用 $l * \frac{l+1}{2}$ 次， $2^l \leq m < 2^{l+1}$， $l$ 为正整数

从 m 得$\sqrt{m}$： 8 次

从$\sqrt{n}$ 和 $\sqrt{m}$ 得$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$ ： 11 次

$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$ 得 $\frac{n}{m}$ 的正方形： 5 次

所以 Fx(n,m)的上限公式是 **F**(n,m) = $k * \frac{k+1}{2} + l * \frac{l+1}{2} + 34$

其中，$m, n \geq 1$； $l, k \geq 0$； $l, k$ 为整数； $2^k \leq n < 2^{k+1}$; $2^l \leq m < 2^{l+1}$

假如 n=m-1 ➔ **F**(n,m) $< 2 * l * \frac{l+1}{2} + 34$， 因此

$\mathbf{F}(\mathrm{m}-1,\mathrm{m}) < l*(l+1)+34$ ➔ $\frac{\mathbf{F}(\mathrm{m}-1,\mathrm{m})}{\mathrm{m}} < \frac{l\times(l+1)+34}{\mathrm{m}}$

由于 $m \geq 2^l$ ➔ $\frac{\mathbf{F}(\mathrm{m}-1,\mathrm{m})}{\mathrm{m}} < \frac{l\times(l+1)+34}{2^l}$

所以 $\lim_{m\to\infty}\frac{\mathbf{F}(\mathrm{m}-1,\mathrm{m})}{\mathrm{m}} \leq \lim_{m\to\infty}\frac{l\times(l+1)+34}{2^l}$ ;

但是 $m < 2^{l+1} \Rightarrow l > \log_2 m - 1 \Rightarrow \lim_{m\to\infty} l \to \infty$

因此 $\lim_{m\to\infty}\frac{\mathbf{F}(\mathrm{m}-1,\mathrm{m})}{\mathrm{m}} \leq \lim_{l\to\infty}(\frac{l\times(l+1)+40}{2^l}) = \lim_{l\to\infty}(\frac{\mathrm{l}^2+\mathrm{l}+34}{2^l}) = 0$

$l$ 增长时，$2^l$ 是指数型增长，而$l^2+l+34$ 是是多项式型增长，指数型增长比多项式型增长是更高的数量级（注：学过高等数学的学生可以参考洛必达规则来求证）。

由此 $\lim_{m\to\infty}\frac{\mathbf{F}(m-1,\mathrm{m})}{\mathrm{m}} = 0$ ,

而 $0 \leq \mathrm{Fx}(\mathrm{m}-1,\mathrm{m}) \leq \mathbf{F}(\mathrm{m}-1,\mathrm{m})$，所以 $\lim_{m\to\infty} 0 \leq \lim_{m\to\infty}\frac{\mathrm{Fx}(\mathrm{m}-1,\mathrm{m})}{\mathrm{m}} \leq \lim_{m\to\infty}\frac{\mathbf{F}(\mathrm{m}-1,\mathrm{m})}{\mathrm{m}}$

也就是说： $0 \leq \lim_{m\to\infty}\frac{\mathrm{Fx}(\mathrm{m}-1,\mathrm{m})}{\mathrm{m}} \leq 0$ ==> $\lim_{m\to\infty}\frac{\mathrm{Fx}(\mathrm{m}-1,\mathrm{m})}{\mathrm{m}} = 0$

总而言之，我们上面提出的用圆规和直尺作正方形 ABCD 面积比例为 n/m 的正方形方法符合要求。

**VI-c : 比较上述方法与 第 IV 节中建立正方形 ABCD 面积比例为 7/8 的正方形中使用的方法**

根据上述“圆规直尺函数”：

F(n,m) = $k*\frac{k+1}{2} + l*\frac{l+1}{2} + 34$

其中，$m,n \geq 1$; $l,k \geq 0$; $l,k$ 为整数； $2^k \leq n < 2^{k+1}$; $2^l \leq m < 2^{l+1}$

n = 7 ➔ k= 2 ; m =8 ➔ l=3 ➔ F(7,8) = 2*(2+1)*1/2 + 3*(3+1)*1/2 + 34 =43.

第 III-a 节中建立正方形 ABCD 面积比例为 7/8 的正方形中使用的方法只需要使用 30 次圆规和直尺。第 III-b 节中的方法更只需要使用 14 次圆规和直尺。

所以，第 IV 中的方法是特例，使用了特殊优化的方法，而 **F**(n,m) 只是一种通用的优化方法的“圆规直尺函数” Fx(n,m) 的上限函数。

在特定情况下，会有特定更优化的选择。

**思考**:

是否存在符合广泛应用需求但更优化的方法使它的 “圆规直尺函数” $F_{new}$ (n,m) < F(n,m) ）？

你能找到更优秀的符合题目要求的方法吗？ （提示：感兴趣的同学可以试试 3 基法，即 $\forall n > 1, \exists k \geq 0$, $n,k$ 为正整数，$3^k \leq n < 3^{k+1}$）。

**VII，所有可用圆规直尺作出的正方形与给定正方形面积的比例数是个几何数域**

设所有可用圆规和直尺作出的正方形与给定正方形面积的比例数为 T。由于我们假设给定的正方形面积为 1， 所以这些与给定面积的比例数和作出的正方形的面积重合。为叙说方便起见，我们在以下文字中，只讲正方形面积，而不强调是与给定正方形面积的比。

**VII-a : (T, ✚) 是个交换群：记“✚” 为两正方形的面积相加**

证明:

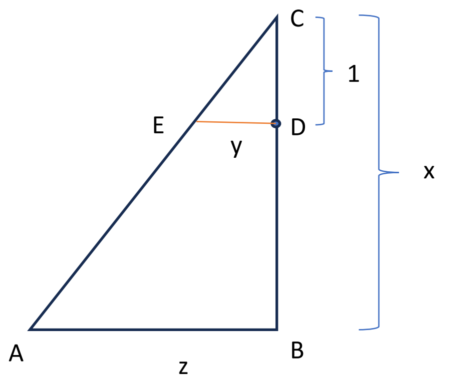
- $\boldsymbol{T}$ *不是空集*：复制的给定的正方形的面积为 1，所以 $1 \in \boldsymbol{T}$ 。
- 记 0 为边长为 0 的正方形，$\forall x \in \boldsymbol{T}$，0 + x 是边长为 $\sqrt{0+x}=\sqrt{x}$，面积为 x 的正方形；所以 0+x=x 所以 0 是 T 的中性元素 。
- $\forall a, b \in \boldsymbol{T}$，$a, b$ 是边长分别为 $\sqrt{\mathrm{a}}$，$\sqrt{\mathrm{b}}$ 的正方形；$\sqrt{\mathrm{a+b}} = \sqrt{\mathrm{b+a}}$是直角三角形直边分别为 $\sqrt{\mathrm{a}}$，$\sqrt{\mathrm{b}}$ 的斜边长；以这斜边做的正方形面积为 a+b，所以 $\mathrm{a+b} \in \boldsymbol{T}$，而且 a+b = b+a 。

**VII-a：(T\{0}, x) 是个交换分布群：记“x” 为两正方形的面积相乘。**

- 1，$\forall x, y \in \boldsymbol{T}\setminus\{0\}$,；x x y = y x x ∈ $\boldsymbol{T}$

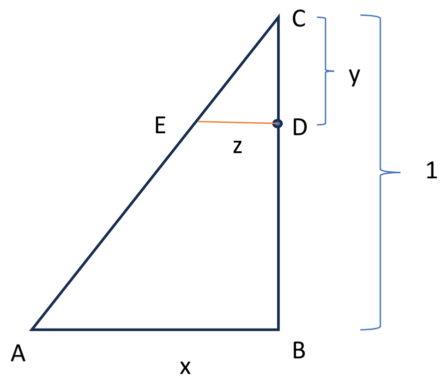
证明：

根据 y> 1 或 x > 1；y< 1 和 x < 1 两种情况（见下图），我们都能用圆规和直尺作出 z=x*y，并由此得到$\sqrt{\mathrm{z}} = \sqrt{x*y} = \sqrt{y*x}$，然后作出以$\sqrt{x*y}$为边长，面积为 z = $x*y = y*x$ 或 x x y = y x x 的正方形。




y 或 x > 1；设 x>

1/y = x/z ➔ z= x*y



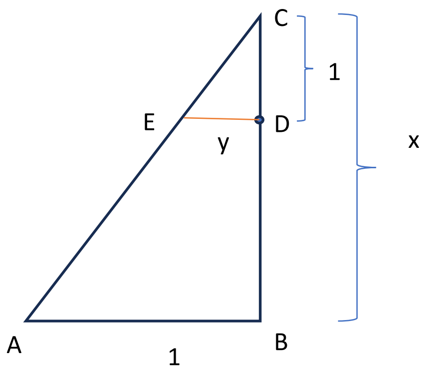

y 和 x < 1；x>

y/1 = z/x ➔ z= x*y

- 2，1 为给定正方形的面积，它是(T\{0}, x) 的中性元素：$\forall x \in \boldsymbol{T}\setminus\{0\}$，1 x x = x
- 3，$\forall x \in \boldsymbol{T}\setminus\{0\}$，$x$ 的倒数 $\frac{1}{x} \in \boldsymbol{T}$

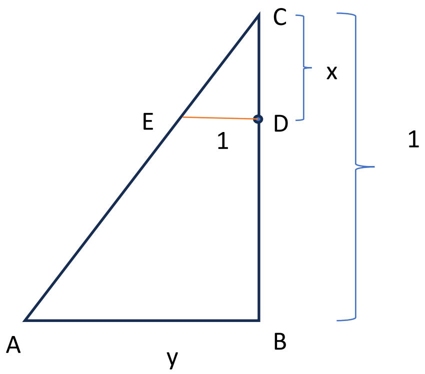
证明：

根据 x > 1 或 x < 1 两种情况，我们都能作出 y= 1/x，并由此得到$\sqrt{\frac{1}{x}}$为边长（参考基本知识 G），然后作出面积为 1/x 的正方形。




如果 x >

1/x = y/1 ➔ y= 1/x




如果 x

1/x = y/1 ➔ y= 1/x

- 4， $\forall a,b,c \in \boldsymbol{T}\backslash\{0\}$; a ⊗ (b ⊕ c) = a ⊗ b ⊕ a ⊗ c ∈ $\boldsymbol{T}$

证明：**T** 是实数的一个子群， ⊗,⊕ 是定义在 **T** 上的乘、加运算。前面我们已证明了 ⊗,⊕ 运算在 **T** 上是稳定的，它的分布性随从实数运算法则。

- 同样 $\forall a,b,c \in \boldsymbol{T}\backslash\{0\}$; (b ⊕ c) ⊗ a = b ⊗ a ⊕ c ⊗ a ∈ $\boldsymbol{T}$

总结：

| |
|---|
| 根据前面的证明，$\forall x \in \boldsymbol{T}\backslash\{0\}$，$\mathrm{x} \to \sqrt{\mathrm{x}}$；$\mathrm{x} \to \mathrm{x}^2$；$\mathrm{x} \to \mathrm{x}^3$ 都是定义在 **T** 上的内部运算 （见下图）。 |
| 以上函数**的重复使用**的结果使得数域 **T** 包含至少所有 $(\frac{n}{m})^{2^k}$， $(\frac{n}{m})^{3^p}$ 数，n,m,p,k 为整数 ; n,m,p>0 。 |
| 特别是 **T** 包含了所有的有理数。 |